Sobre el infinito

David Hilbert

(1925)

Hilbert dedicó a los fundamentos de las matemáticas una serie de ensayos (1904,1917, 1922, 1922a, 1925, 1927, 1928a, 1930, 1931, todos excepto el último leídos como discursos), a los cuales se ha de añadir su ensayo sobre la axiomatización del sistema de números reales (1900) y algunas partes de su discurso en el Congreso Internacional de Matemáticos de París (1900a), concretamente aquéllas sobre la hipótesis del continuo, la hipótesis del orden total y la consistencia del sistema de números reales.

Entre todas estas contribuciones destaca el discurso de 1925 como la presentación más completa de las ideas de Hilbert. Es el texto de un discurso hecho en Münster el 4 de junio de 1925 en un encuentro organizado por la Sociedad Matemática de Westfalia para honrar la memoria de Weierstrass. Además de la versión original (1925), se publicaron dos versiones modificadas (1925a; 1930a, Apéndice VIII). Sin embargo, éstas fueron abreviadas y, entre otros pasajes, omiten por completo la sección que trata el problema del continuo; la tercera versión contiene una serie de modificaciones y añadidos menores. El traductor siguió la versión original, pero utilizó la tercera para aclarar el significado de algunos pasajes, y algunos de los añadidos de esta tercera versión aparecen en la traducción que sigue entre corchetes.

El ensayo consta de dos partes bastante diferenciadas. La primera es una presentación clara y llena de fuerza de las ideas de Hilbert en el momento sobre los fundamentos de las matemáticas. Empieza por recordar cómo Weierstrass eliminó las referencias al infinito en análisis (Hilbert podría haber mencionado a Cauchy e incluso a D'Alembert) y revisa el papel que el infinito jugó en la física, en la teoría de los conjuntos y, cuando tratamos con proposiciones generales, en la lógica. Apoyándose en el ejemplo de la aritmética, presenta la distinción entre proposiciones finitarios e ideales y lleva a cabo una formalización simultánea de la lógica y la aritmética (el sistema presentado por Hilbert se describe con mayor detalle en su ensayo de 1927, reproducido en las páginas 465−469 de esta obra; sobre este sistema se puede consultar también el Suplemento IV de *Hilbert y Bernays 1939* y, para llevar a cabo un estudio crítico, *Asser 1957*).

La segunda parte del ensayo es un esbozo de probar la hipótesis del continuo. Planteado por primera vez por Cantor en los albores del desarrollo de la teoría de los conjuntos (1878, pág. 258) y presentado por Hilbert como el Problema nº 1 de su famosa lista de problemas matemáticos no resueltos (1900a), el problema del continuo opuso resistencia durante años a los esfuerzos de los matemáticos. El único resultado parcial conocido en la época del intento de la demostración de Hilbert era el de König: el poder del continuo no es un límite de muchos números cardinales menores eenumerables (véase *Hausdorff 1914*, pág. 67−68); para una visión de conjunto del problema del continuo véase Gödel 1947).

En vez del conjunto de números reales, Hilbert toma el conjunto equivalente de funciones teorético−numéricas e intenta demostrar que hay una relación entre el conjunto de ordinales de la segunda clase numérica y el conjunto de estas funciones. Al tratar con definiciones de funciones en lugar de con funciones, el razonamiento toma un aspecto metamatemático ausente en el trabajo de Cantor. El hecho de que los valores de una función teórico−numérica puedan depender de la solucionabilidad de cierto problema matemático establece una conexión entre la segunda parte del discurso y la primera y Hilbert invoca su convicción previamente expresada de que todo problema matemático bien planteado tiene solución. Si la definición de una función conlleva la solucionabilidad de un problema matemático, contendrá un cuantificador existencial infinito o, según el sistema de Hilbert, la función . Convencido de la posibilidad de justificar la parte transfinita de las matemáticas mediante métodos metamatemáticos, Hilbert expone como Lema I que dichas definiciones de funciones pueden ser reemplazadas por definiciones recursivas, en las que, exceptuando una serie de cuantificadores universales prenexos, no hay ningún cuantificador. (En *1927* Hilbert asegura que su demostración no requiere a Lema I; ver pág. 476).

Una vez todos los métodos para definir las funciones teórico−numéricas han sido reducidos a (sustitución y) recursión, Hilbert considera dos esquemas básicos de recursión, ordinario y transfinito (en los que las variables individuales abarcan, respectivamente, los números naturales y los ordinales de la segunda clase numérica).Extiende estos esquemas permitiendo el uso de funcionales, es decir, de funciones de funcionales previamente presentados a números naturales, siendo los funcionales iniciales las funciones teórico−numéricas. Presenta la función de Ackermann para mostrar que la introducción de funcionales lleva a una extensión genuina del esquema de la recursión.

Hilbert muestra entonces que, puesto que las ecuaciones de recursión que definen funciones contienen tipos variables de altura creciente, estas ecuaciones son análogas a las definiciones de los ordinales de la segunde clase numérica. El razonamiento esta lejos de ser una demostración. Entre varias afirmaciones no demostradas contiene en particular, como Lema II, la afirmación de que en las definiciones de funciones teórico−numéricas la recursión transfinita puede ser reemplazada por la recursión ordinaria.

El intento de Hilbert levantó pocos comentarios. Paul Lévy (1964, Pág. 89) : Zermelo me dijo en 1928 que incluso en Alemania nadie entendió lo que quería decir Hilbert. Después de1927 el propio Hilbert dejo de lado el problema. La escala de tipos variables no ha sido investigada en lo sucesivo. Gödel (1938,1939,1940) demostró que la hipótesis del continuo era consistente con los axiomas tradicionales de la teoría de conjuntos y Cohen (1963, 1963a, 1964) que era independiente de estos axiomas.

En una revisión de Ackermann 1928, Skolem (1928ª, ver también 1929ª, Pág. 18−19) afirmo de nuevo su convicción previamente expresada (ver nota pie de Pág. 9, Pág. 299) de que, a la vista del teorema Löwenheim−Skolem, algunos problemas que conllevan números cardinales pueden ser indecidibles en cualquier teoría de conjuntos formalizada y que el problema del continuo puede ser uno de ellos. Luzin (1928,1933,1935) hizo una serie de comentarios sobre el intento de demostración de Hilbert. En su revisión del segundo ensayo de Gödel sobre la consistencia de la hipótesis del continuo (1939) Bernays escribió (1940, Pág. 118) : Todo el razonamiento de Gödel puede ser considerado también como una manera de modificar el proyecto de Hilbert de una demostración de la hipótesis del continuo de Cantor, como se describió en 10813 (Hilbert 1925) para hacerlo practicable y al mismo tiempo generalizable para poderes superiors. Sobre la relación del trabajo de Gödel sobre el problema del continuo con el ensayo de Hilbert de 1925, el profesor Gödel escribió en una carta al editor con fecha 8 de Julio de 1965: hay una analogía remota entre el Lema II de Hilbert y mi teorema 12.2 (1940, Pág. 54) para = 0. Sin embargo, existe la gran diferencia de que Hilbert considera sólo definiciones estrictamente constructivas y, mas aún iteraciones transfinitas de las operaciones definidas sólo hasta los ordinales constructivos, mientras que yo admito no sólo cuantificadores en las definiciones, sino también iteraciones de las operaciones definidas hasta cualquier número ordinal, sin importar si o como se pueda definir. El término conjunto constructible en mi demostración sólo esta justificado en un sentido muy débil y, en particular solamente en el sentido de'relativo a números ordinales', donde los últimos no estén sujetos a ninguna condición de constructividad. Fue exactamente por ver la situación desde este punto de vista altamente transfinito y de conjuntos teóricos que en mi acercamiento se superaron las dificultades y se consiguió una prueba consistente relativamente finitaria . Por supuesto no hay ninguna necesidad en este planteamiento de nada como el Lema I de Hilbert. Hilbert probablemente espero probarlo como un caso especial de un teorema general en el que los modos transfinitos de inferencia aplicados a un sistema de axiomas correctamente construido no llevaban a la inconsistencia.

El ensayo de Hilbert dio un impulso al estudio de la jerarquía de las funciones teórico−numéricas y a la de los esquemas varios para las definiciones recursivas de funciones. En particular el trabajo de Hilbert proporciona una aproximación al problema de asociar ordinales con funciones teórico−numéricas definidas pos recursiones (ver Kleene 1958 y Péter 1951a, 1953).

La traducción fue realizada por Stefan Bauer−Mengelberg, y se reproduce aquí con el permiso de ediciones Springer.

Weierstrass, a través de una critica elaborada con la sagacidad de un maestro creo una base firme para el análisis matemático. Al clarificar entre otras nociones la del mínimo, función y derivada, elimino los defectos restantes del calculo, lo limpio de todas las ideas vagas concernientes a lo infinitesimal, y venció concluyentemente las dificultades que hasta entonces tenían sus raíces en la noción de lo infinitesimal. Si hoy en día hay un completo acuerdo y certeza en el análisis siempre que se emplean los modos de inferencia que están basados en las nociones del número irracional y del limite en general, y si hay unanimidad en todos los resultados concernientes a las preguntas mas complicadas en la teoría de ecuaciones diferenciales e integrales a pesar del uso mas atrevido de las más diversas combinaciones de superposición, yuxtaposición y jerarquización de límites, esto es esencialmente debido a la actividad científica de Weierstrass.

Aun así las discusiones sobre los fundamentos del análisis no acabaron cuando Weierstrass proporciono una base para el calculo infinitesimal.

La razón de esto es que el significado de infinito en las matemáticas no se había aclarado totalmente aún. Para estar seguros lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande se eliminaron del análisis, como estableció Weierstrass, a través de una reducción de proposiciones sobre ellas a (proposiciones sobre) relaciones entre magnitudes finitas. Pero el infinito todavía aparece en las secuencias infinito−numéricas que definen los números reales y, mas aún en la noción del sistema de números reales, que nosotros concebimos como una totalidad completa y cerrada.

Weierstrass apela sin restricción y utiliza una y otra vez las formas de inferencia lógica en las que esta concepción encuentra su expresión − a saber aquellas que empleamos cuando, por ejemplo tratamos con todos los números reales teniendo una cierta propiedad o afirmación de que existan números reales que tengan una cierta propiedadcuando establece las bases del análisis.

Por lo tanto el infinito, de una manera disfrazada fue capaz de encontrar su camino de vuelta a la teoría de Weierstrass y es capaz de escapar el afilado filo de su critica; por lo tanto es el problema del infinito en el sentido únicamente indicado el que necesita todavía ser resuelto concluyentemente. Y, así como el infinito, en el sentido de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, pudo, en el caso de los procesos limitantes del calculo infinitesimal, aparecer como una mera manera de hablar, debemos reconocer de esta manera que el infinito en el sentido de la totalidad infinita (donde todavía lo hayamos en los modos de inferencia) es algo meramente aparente. Y así como las operaciones con lo infinitamente pequeño fueron reemplazadas por procesos en el infinito que tienen prácticamente los mismos resultados y llevan prácticamente a las mismas relaciones formales elegantes, los modos de inferencia que emplean el infinito deben ser reemplazados generalmente por procesos finitos que tienen exactamente los mismos resultados, es decir que nos permiten llevar a cabo demostraciones en las mismas líneas y utilizar los mismos métodos de obtención de fórmulas y teoremas.

Esto es el propósito de mi teoría. Su fin es dotar al método matemático de la fiabilidad definitiva que la era critica del calculo infinitesimal no consiguió; por lo que debe completar lo que Weierstrass, al proporcionar una base para el análisis, se propuso hacer y hacia lo que él dio el primer paso necesario y esencial.

Pero al aclarar la noción del infinito, aún debemos tomar en consideración un aspecto más general de la cuestión. Si prestamos mucha atención, encontraremos que la literatura matemática esta repleta de cosas absurdas e inanes, de las que se puede culpar normalmente al infinito. Así, por ejemplo algunos acentúan la estipulación, como un tipo de condición restrictiva, de que, si las matemáticas han de ser rigurosas, sólo un número finito de inferencias es admisible en una demostración − ¡como si alguien hubiera tenido éxito alguna vez en llevar a cabo un número infinito de ellas!.

Incluso viejas objeciones que han sido consideradas como resueltas desde hace tiempo reaparecen de una manera diferente. Así, recientemente nos encontramos afirmaciones como esta: incluso si pudiéramos plantear una noción con seguridad (es decir, sin generar contradicciones) y si esta fuera demostrada, aún no habríamos establecido que estuviera justificado que planteáramos esa noción. ¿No es precisamente la misma objeción que la hecha anteriormente contra los números complejos cuando se dijo que uno no podía, para estar seguro, obtener una contradicción mediante el uso de estos, y que su planteamiento no estaba aún así justificado ya que, después de todo, las magnitudes imaginarias no existen? No, si justificar un procedimiento significa algo mas que demostrar su consistencia, sólo puede significar el determinar si el procedimiento tiene éxito al cumplir su propósito. De hecho el éxito es necesario; aquí también es el tribunal mas alto al cual todos se someten.

Otro autor parece ver contradicciones, como fantasmas, incluso cuando nadie ha afirmado nada, a saber, en el mundo concreto de la percepción en sí mismo, cuyo funcionamiento coherente se considera una suposición especial. Yo siempre he creído que sólo las afirmaciones y, en la medida en que llevan a afirmaciones mediante inferencias, las suposiciones podrían contradecirse y la visión de que los hechos y acontecimientos pudieran llegar a hacerlo me parece el ejemplo perfecto de una estupidez.

Con estos comentarios quería mostrar únicamente que la aclaración definitiva de la naturaleza del infinito es necesaria, no meramente por un interés de la ciencia individual, sino también por el honor del entendimiento humano en sí mismo.

El infinito siempre ha agitado las emociones de la humanidad más profundamente que cualquier otra cuestión; el infinito ha estimulado y fertilizado la razón como pocas otras ideas lo han hecho; pero también el infinito, más que cualquier otra noción, necesita aclaración.

Si nos dedicamos a esta tarea, a la aclaración de la naturaleza del infinito, tenemos que rememorar brevemente el significado del infinito en la reliada, primero veamos qué podemos aprender sobre esto de la física.

La impresión inicial e ingenua que tenemos de los sucesos naturales y de la materia es de uniformidad, de continuidad. Si tenemos un trozo de metal o un volumen de un líquido, nos hacemos a la idea de que es divisible sin límite, que cualquier parte de ello, no importa lo pequeña quesea, tendría las mismas propiedades. Pero, donde los métodos de investigación en la física de la materia fueron refinados suficientemente, se alcanzaron limites de la divisibilidad que no son debidos a la deficiencia de nuestros experimentos sino a la naturaleza de la materia de manera que podríamos ver la tendencia de la ciencia moderna como una emancipación de lo infinitamente pequeño y, en vez de la vieja máxima natura non facit saltus afirmar ahora lo contrario, la naturaleza hace saltos.

Como es bien conocido toda materia esta compuesta de pequeños bloques de construcción, átomos, que cuando se combinan y conectan forman la completa multiplicidad de sustancias macroscópicas.

Pero, la física no se paro con la teoría atómica de la sustancia. Hacia finales del siglo pasado la teoría atómica de la electricidad, que al principio pareció mucho más desconocida, tomó lugar detrás de aquella teoría. Mientras hasta aquel tiempo se había considerado a la electricidad un fluido y ya había sido el modelo de un agente con un efecto continuo, se demostró que también estaba formada por partículas, a saber, electrones positivos y negativos.

Además de la materia y la electricidad hay otra cosa en física que es real, para la que la ley de la conservación también es válida y es la energía. Ahora ni siquiera la energía, tal y como la conocemos hoy en día, permite una división infinita de manera absoluta y sin restricciones; Planck descubrió que la energía viene en quanta.

Y el resultado global es que no encontramos en ninguna parte de la realidad un continuo homogéneo que permita la división continua y que por tanto, pueda hacer realidad el infinito en lo pequeño. La divisibilidad infinita de un continuo es una operación que sólo está presente en nuestros pensamientos; es meramente una idea, que es refutada por nuestra observación de la naturaleza y por la experiencia alcanzada en física y química.

Encontramos el segundo lugar donde la cuestión del infinito nos aparece en la naturaleza cuando consideramos el universo como un todo. Aquí debemos investigar la vasta expansión del universo para ver si hay algo infinitamente grande en ello.

Durante largo tiempo prevaleció la opinión de que el mundo es infinito; hasta los tiempos de Kant e incluso después nadie tuvo alguna duda sobre la infinidad del espacio.

De nuevo, es la ciencia moderna, especialmente la astronomía quien vuelve a traer esta cuestión y trata de decidirlo, no mediante métodos inadecuados de especulación metafísica, sino a través de razonamientos que están a poyados en la experiencia y descansan sobre la aplicación de las leyes de la naturaleza. Y han aparecido importantes objeciones contra el infinito, la geometría euclidiana lleva necesariamente a la presunción de que el espacio es infinito. Ahora para estar seguros, la geometría euclidiana, como estructura y sistema de naciones es consecuente consigo misma, pero esto no implica que se aplicara a la realidad. Si este fuera el caso sólo podrían decidir la observación y la experiencia. En el intento de demostrar la infinidad del espacio de una manera especulativa se cometieron errores obvios. Del hecho de que fuera de una región espacial haya siempre mas espacio sólo se deduce que el espacio no tiene limites, pero no que es infinito. Sin embargo, el hecho de no tener límites y la finidad no son excluyentes la una de la otra. En la geometría a la que comúnmente nos referimos como elíptica, la investigación matemática proporciona el modelo natural de un mundo finito. Y el abandono de la geometría euclidiana hoy en día no es meramente una especulación filosófica o puramente matemática; hemos llegado a abandonarla también por otras consideraciones que originalmente no tenían nada que ver con la cuestión de la finidad del mundo. Einstein mostró que era necesario renunciar a la geometría euclidiana. Basándose en su teoría de la gravitación ataca las cuestiones cosmológicas y muestra que un mundo finito es posible, y todos los resultados descubiertos por los astrónomos son también compatibles con la presunción de un mundo elíptico.

Hemos establecido en dos direcciones, hacia lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, que la realidad es finita. Aun así sería posible que el infinito tuviera un lugar bien justificado en nuestro pensamiento y jugara el papel de una noción indispensable. Examinaremos cual es la situación de la ciencia de las matemáticas al respecto y hemos de consultar primero al niño más puro e ingenuo del intelecto humano, la teoría de los números. Vamos ahora a seleccionar cualquier fórmula de la rica multitud de fórmulas elementales, por ejemplo,

12 +22+32+.....+n2= 1/6 n (n+1)(2n+1)

Puesto que en ella podemos sustituir cualquier entero por n, por ejemplo, n=2 o n=5, esta fórmula contiene infinitamente muchas proposiciones, y esto es obviamente lo que es esencial en ella; esa es la razón por la que constituye la solución a un problema aritmético y por la que su demostración requiere un genuino acto de pensamiento, mientras que las ecuaciones numéricas especificas

12+ 22=1/6*2*3*5 y 12+22+32+42+52=1/6*5*6*11

pueden ser verificadas mediante cálculos y por lo tanto no tienen ningún interés esencial cuando se consideran por sí mismas.

Nos encontramos con otra interpretación totalmente diferente o caracterización fundamental de la noción del infinito cuando consideramos el método − tan extremadamente importante y fértil − de los elementos ideales.

El método de los elementos ideales ya tiene una aplicación en la geometría elemental del plano. Allí los puntos y las líneas rectas del plano son inicialmente los únicos objetos existentes reales. El axioma de conexión, entre otros es válido para ellos; para dos puntos cualquiera hay siempre una y sólo una línea recta que pasa por ellos. De aquí sigue que la intersección de dos líneas rectas esta en un punto. La proposición de que dos líneas rectas tengan su intersección en algún punto no es correcta; las dos líneas pudieran ser paralelas. Pero como es bien sabido en la introducción de elementos ideales, a saber, puntos en el infinito y una línea en el infinito, hacen que sea universalmente válida la proposición según la cual dos líneas rectas siempre tienen su intersección en un sólo punto.

Los elementos ideales en el infinito tienen la ventaja de hacer el sistema de las leyes de conexión tan simple y perspicuo como pudiera ser posible. Como es bien sabido, la simetría entre punto y línea recta entonces respalda el principio de la dualidad de la geometría que es tan fecundo.

De la misma manera, las magnitudes ordinarias complejas del álgebra son un ejemplo del uso de elementos ideales; sirven para simplificar los teoremas sobre la existencia y el número de raíces de una ecuación.

De la misma manera que en geometría infinitamente muchas líneas rectas, a saber, aquellas que son paralelas entre sí, son utilizadas para definir un punto ideal, en la aritmética mas alta ciertos sistemas de infinitamente muchos números se combinan en un número ideal, y de hecho probablemente ningún uso del principio de elementos ideales sea un mayor golpe de genio que este. Cuando este procedimiento ha sido empleado generalmente en un campo algebraico encontramos de nuevo las simples y bien conocidas leyes de la divisibilidad, de la misma manera que son válidas para los ordinarios enteros 1,2,3,4,... Aquí ya hemos entrado en el dominio de la aritmética superior.

Ahora llegamos al análisis, la estructura que en la ciencia matemática es mas elaborada y se ha ramificado mas delicadamente que cualquier otra. Sabéis que papel dominante juega el infinito aquí, como de alguna manera el análisis matemático no es mas que una simple sinfonía del infinito.

Los nimios avances hechos en el calculo infinitesimal se basan en su mayoría en sistemas matemáticos de infinitamente muchos elementos. Puesto que era muy tentador identificar el infinito con lo muy grande, pronto hubieron inconsistencias, las paradojas del calculo infinitesimal, como se han venido a llamar, que en parte ya eran conocidas por los sofistas en la antigüedad. Se hizo un avance fundamental cuando se reconoció que muchas proposiciones válidas para el finitopor ejemplo, que la parte es mas pequeña que el todo, que el mínimo o el máximo existe, que el orden de los términos o los factores se pueden cambiarno se podían trasladar directamente al infinito. Al principio de mi discurso he mencionado que, sobre todo a través de la sagacidad de Weierstrass, se han aclarado completamente estas cuestiones, y hoy en día el análisis se ha convertido dentro de su dominio en una guía infalible y a la vez en un instrumento practico para la utilización del infinito.

Pero, sólo en análisis no nos proporciona todavía la visión interior mas profunda de la naturaleza del infinito. Esto nos lo transfiere sólo una disciplina que es mas cercana a la manera de pensar filosófica general y que estuvo destinada a darle una nueva luz a toda la complejidad de cuestiones en relación al infinito. Esta disciplina es la teoría de conjuntos cuyo creador fue Georg Cantor. Aquí sin embargo, sólo nos interesa lo que era realmente único y original en la teoría de Cantor y constituía su verdadero eje, a saber, su teoría de números transfinitos. Para mi esta es la flor mas admirable del intelecto matemático y en general uno de los logros mayores de la actividad humana puramente racional. ¿Y ahora de qué trata? .

Si quisiéramos caracterizar brevemente la nueva concepción del infinito que presento Cantor, sin duda podríamos decir : en análisis tratamos con lo infinitamente pequeño o lo infinitamente grande sólo como una noción de limite −como algo que va a ser o esta siendo producidoeso es, como decimos, con el infinito potencial. Pero este no es el verdadero infinito en sí mismo. Este es el que tenemos por ejemplo cuando consideramos la totalidad de los números 1,2,3,4,... como una entidad completa, o como cuando consideramos los puntos del segmento de una línea como una totalidad de objetos dada y completa. Este tipo de infinito se llama el infinito absoluto.

Frege y Dedekind, dos matemáticos que hicieron un trabajo altamente meritorio en los fundamentos de las matemáticas, ya utilizaron − con independencia el uno del otroel infinito absoluto. Su fin específico era hacer que la pura lógica proporcionara a la aritmética una base que fuera independiente de toda intuición y experiencia así como derivar la aritmética mediante la lógica únicamente. Dedekind incluso rehusó establecer sobre la intuición la noción del número finito; en su lugar, de esforzó por derivarlo mediante métodos puramente lógicos, haciendo un uso esencial de la noción de conjuntos infinitos. Fue Cantor, sin embargo, quien desarrolló sistemáticamente la noción del infinito absoluto. Si miramos los dos ejemplos de infinito que hemos mencionado, (1) 1, 2, 3, 4,... y (2) los puntos del segmento de una línea de 0 a 1, la idea que aparece más fácilmente es la de considerarlos únicamente desde el punto de vista de la cardinalidad, y cuando lo hacemos observamos hechos sorprendentes que le son familiares a cualquier matemático hoy en día. Ya que, si consideramos el conjunto de todos los números racionales, y por tanto de todas las fracciones ½, 1/3, 2/3, ¼,...,3/7..., resulta que, estrictamente desde el punto de vista de la cardinalidad, este conjunto no es mayor que el conjunto de los enteros; decimos que los números racionales pueden ser numerados en la manera ordinaria, o que son eenumerables. Y lo mismo es válido para el conjunto de todos los números que pueden ser obtenidos (de los números racionales) por extracción de radicales, y de hecho para el conjunto de todos los números algebraicos. En nuestro segundo ejemplo tenemos una situación similar: inesperadamente, el conjunto de todos los puntos en un cuadrado o cubo no es, estrictamente desde el punto de vista de la cardinalidad , mayor que el conjunto de puntos en el segmento de la línea de 0 a 1; de hecho, esto también es válido incluso para el conjunto de todas las funciones continuas. Alguien que aprenda esto por primera vez puede llegar a pensar que estrictamente desde el punto de la cardinalidad no hay otra cosa que un solo infinito. No, los conjuntos de nuestros dos ejemplos, (1) y (2), no son equivalentes. El conjunto de (2) no puede ser numerado; es mayor que el conjunto de (1). Aquí toman las ideas de Cantor su giro distintivo. ¡Los puntos del segmento de una línea no pueden ser numerados de la manera ordinaria mediante 1,2,3,...! Pero, si admitimos el infinito absoluto, no estamos limitados a este tipo ordinario de numeración o de ninguna manera obligado a abandonar ahí. Cuando contamos 1,2,3,..., podemos ver los objetos así numerados como un conjunto infinito que ha sido completado en este orden definitivo; si indicamos el tipo de este ordenamiento, como hace Cantor, como , entonces la numeración continua de manera natural con +1, +2,... hasta + , o *2, y de nuevo *2+1, *2+2, *2+3..., *2+   (= *3), y aún *2, *3, *4, ..., *   (=), +1, ..., por lo que
finalmente obtenemos la siguiente tabla:

1,2,3,...,

 , +1, +2,...,

 *2¸ *2+1, *2+2,...,

 *3, *3+1, *3+2,...,

 , +1,...,

 + , + *2, + *3,...,

 *2.. *2+ ,...,

 ,...,

 ,...,

 ,....

Estos son los primeros números transfinitos de Cantor, los números de la segunda clase numérica, como él los llama. Por tanto llegamos ellos simplemente mediante una transnumeración más allá del ordinario infinito eenumerable, es decir, mediante una sistemática continuación de la manera de contar totalmente natural y determinada sin ambigüedades como ocurre en el finito. De la misma manera que hasta ahora sólo contábamos el 1º, 2º, 3º,.. como objeto de un conjunto, ahora contamos el º, (+1)º,...,wwº como objeto.

En este punto, la cuestión que surge obviamente de manera inmediata es si mediante la manera de contar transfinita se podrían enumerar los elementos de conjuntos que no son eenumerables en el sentido ordinario.

Siguiendo estos pensamientos, Cantor desarrolló la teoría de los números transfinitos de una manera más exitosa y creó un cálculo completo para ellos. Así, finalmente, con la gigantesca colaboración de Frege, Dedekind y Cantor, el infinito subió al trono y disfrutó del período de su mayor triunfo. El el vuelo más importante, el infinito había alcanzado una cúspide vertiginosa de éxito.

La reacción no dejó de surgir; tomó formas muy dramáticas. Los acontecimientos sufrieron casi la misma situación que en el desarrollo del cálculo infinitesimal. Con la alegría de los nuevos y ricos resultados, los matemáticos no habían examinado aparentemente de manera suficientemente crítica si los modos de inferencia empleados eran admisibles; puesto que siguiendo estrictamente la manera en la que se formaban las nociones y se utilizaban los modos de inferencia − maneras que ya se habían convertido en habitualesaparecían contradicciones, en un principio esporádicas, luego cada vez más severa y alarmantemente. Eran las paradojas de la teoría de conjuntos, como se les llama. En particular, una contradicción descubierta por Sérmelo y Russell, tuvo, cuando fue conocida, un efecto totalmente catastrófico en el mundo de las matemáticas. Enfrentados a estas paradojas, Dedekind y Frege abandonaron su punto de vista y dejaron de investigar en el campo; Dedekind tuvo reservas sobre permitir una nueva edición de su folleto que marcó una época (1888), y Frege también tuvo que reconocer que la tendencia de su libro (1893, 1903) era errónea, como confiesa en su apéndice. Desde muy diversos rincones se dirigieron ataques extremadamente vehementes contra la teoría de Cantor. La reacción fue tan violenta que se vieron amenazadas las nociones más comunes y fructíferas y los modos de inferencia más simples e importantes en matemáticas y estuvieron a punto de prohibirse. Por supuesto, hubo defensores de las teorías; pero las medidas de defensa fueron bastante débiles y además no se llevaron a cabo en el sitio adecuado en un frente unido. Se recomendaron demasiados remedios para las paradojas; los métodos de clarificación también tuvieron sus altibajos.

Admitamos que la situación en la que nos encontramos actualmente con respecto a las paradojas es a la larga intolerable. Pensemos solamente esto. En matemáticas, este dechado de fiabilidad y verdad, las mismas nociones e inferencias, tal y como uno las aprende, enseña y utiliza, llevan al absurdo. ¿Y en qué otro lugar se puede encontrar la fiabilidad y la verdad si incluso el pensamiento matemático falla?

Pero hay una manera completamente satisfactoria de escapar a las paradojas sin cometer una traición contra nuestra ciencia. Las consideraciones que nos llevan a descubrir esta manera y los objetivos hacia los que queremos avanzar son estos:

- Debemos investigar cuidadosamente aquellas manera de formar nociones y aquellos modos de inferencia que son fructíferos; debemos cuidarlos, apoyarlos y hacerlos utilizables si hay una promesa mínima de éxito. Nadie debe ser capaz de sacarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.
- Es necesario hacer inferencias en todas partes tan fiables como lo son en la teoría de números elementales, que nadie cuestiona y en la que las contradicciones y paradojas sólo surgen a través de nuestra falta de cuidado.

Obviamente sólo podremos ser capaces de lograr estos objetivo en la medida en que aclaremos totalmente la naturaleza del infinito.

Hemos visto anteriormente que el infinito no se ha de encontrar en ningún lugar en la realidad, no importa lo que las experiencias y observaciones o cualquier ciencia pueda aducir. ¿Podría ser entonces que ese pensamiento sobre objetos fuera tan distinto a los acontecimientos que involucren objetos y que actúe de manera tan diferente, tan alejado de toda realidad? ¿No está claro en verdad, que cuando creímos que habíamos descubierto que el infinito era en cierto sentido real nos estábamos dejando llevar a esa creencia por el hecho de que encontremos tan a menudo en la realidad esas dimensiones incalculables en lo grande y en lo pequeño? ¿ Y nos ha defraudado o abandonado la inferencia lógica conceptual alguna vez cuando la hemos aplicado a objetos o acontecimientos reales? No, la inferencia lógica conceptual es indispensable. Nos ha defraudado únicamente cuando hemos aceptado nociones arbitrariamente abstractas, en concreto aquellas bajo las que se agrupan infinitamente muchos objetos. Lo que hacíamos entonces era usar la inferencia conceptual de una manera no válida; es decir, que obviamente no respetábamos condiciones necesarias para el uso de la inferencia lógica conceptual. Y al reconocer que tales condiciones existen y deben ser respetadas vemos que estamos de cuerdo con los filósofos, especialmente con Kant. Kant ya enseñó − y es parte de su doctrinaque las matemáticas tienen a su disposición un contenido obtenido independientemente de toda lógica y por tanto no se les podría proporcionar una base únicamente a través de la lógica; esto es por lo que los esfuerzos de Frege y Dedekind estaban condenados al fracaso. Como condición para el uso de las inferencias lógicas y la ejecución de las operaciones lógicas, se le debe haber dado algo anteriormente a nuestra facultad de representación, ciertos objetos concretos extralógicos que aparezcan intuitivamente como experiencia inmediata anterior a cualquier pensamiento. Si la inferencia lógica ha de ser fiable, debe ser posible analizar completamente estos objetos en todas sus partes, y el hecho de que tengan lugar, difieran los unos de los otros, sigan los unos a los otros o estén concatenados viene dado inmediatamente de manera intuitiva junto con los objetos, como algo que ni se puede reducir a nada más ni requiere reducción. Esta es la postura filosófica básica que considero necesaria para las matemáticas y, en general, para todo el pensamiento, entendimiento y comunicación científicos. Y concretamente en matemáticas, lo que consideramos son los signos concretos mismos, cuya forma, según la concepción que hemos adoptado, es inmediatamente clara y reconocible.

Tengamos en cuenta la naturaleza y los métodos de la teoría ordinaria de los números finitos. Puede ser desarrollada a través de la construcción de números mediante únicamente consideraciones intuitivas conceptuales. Pero la ciencia de las matemáticas no está de ninguna manera agotada por ecuaciones numéricas ni puede ser reducida a ellas solamente. Uno puede decir, sin embargo, que es un equipamiento que siempre debe producir ecuaciones numéricas correctas cuando se aplica a los enteros. Pero entonces nos vemos obligados a investigar la estructura del equipamiento suficiente mente para hacer aparente este hecho. Y la única herramienta de la que disponemos en esta investigación es la misma que la utilizada para la derivación de ecuaciones numéricas en la construcción de la misma teoría de los números, a saber, un interés por el contenido concreto, la estructura mental más finita. Este requisito científico puede ser, de hecho, satisfecho; es decir, que es posible obtener de una manera puramente intuitiva y finitaria, exactamente igual que las verdades de la teoría de los números, aquello que nos garantice la fiabilidad del equipamiento matemático. Consideremos ahora la teoría de los números con más detalle.

En la teoría de los números tenemos los numerales

1, 11, 111, 11111,

Cada numera es perceptivamente reconocible por el hecho de que en él 1 viene siempre seguido por 1 (si es que viene seguido por algo). Estos numerales, que son el objeto de nuestra consideración, no tienen ningún significado por sí mismos. En la teoría elemental de los números. Sin embargo, necesitamos, además de estos signos, otros que signifiquen algo y sirvan para transmitir información, por ejemplo el signo 2como abreviatura del numeral 11, o el numeral 3 como abreviatura del numeral 111; además utilizamos los signos +, =, >, y otros, que nos sirven para comunicar el hecho de que 2 + 3 y 3 + 2 , cuando se tienen en cuenta las abreviaturas utilizadas, son el mismo numeral, es decir, el numeral 11111. De la misma manera, 3>2 sirve para comunicar el hecho de que el signo 3 (111) se extiende más allá del signo 2 (11), o que este último signo es un segmento verdadero del anterior.

Para comunicar también utilizamos letras, como a, b, c, como numerales. De esta manera b>a is la comunicación de que el numeral b se extiende más allá del numeral a. Y, de la misma manera, desde el presente punto de vista, podríamos considerar a+b=b+a como una mera comunicación del hecho de que el numeral a+b es el mismo que b+a. Aquí también la corrección conceptual de esta comunicación puede ser demostrada mediante inferencia conceptual, y podemos ir muy lejos con este tipo de tratamiento intuitivo y conceptual.

Me gustaría mostraros ahora un primer ejemplo en el que vamos más allá de los límites de esta forma de pensamiento conceptual. El mayor número primo conocido hasta ahora (39 dígitos) es

= 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727.

Mediante el procedimiento bien conocido de Euclides podemos, totalmente dentro del marco de la actitud que hemos adoptado, demostrar el teorema de que entre +1 y !+1 existe un nuevo número primo. Además, esta proposición en sí misma está de acuerdo completamente con nuestra actitud finitista, ya que existe aquí sirve únicamente para abreviar la proposición:

Ciertamente +1 o +2 o +3 o ... o !+1 es un número primo.

Pero prosigamos. Obviamente, decir

Existe un número primo que (1) es > y (2) es al mismo tiempo " !+1 viene a ser lo mismo, y esto nos conduce a fórmular una proposición que expresa sólo una parte de la afirmación de Euclides, a saber: existe un número primo que es > . En lo que respecta al contenido, se trata de una afirmación mucho más pobre, que expone sólo una parte de la proposición de Euclides; sin embargo, no importa lo inofensiva que pueda parecer la transición, hay un salto hacia lo transfinito cuando se expone esta proposición parcial, sacada del contexto arriba mencionado, como una afirmación independiente.

¿Cómo puede ser? Tenemos aquí una proposición existencial con existe. De hecho, ya teníamos una en el teorema de Euclides. Pero esta última, con su existe era , como ya he dicho, simplemente otra forma mas corta para expresar

+1 o +2 o +3 o .....o P!+1 es un número primo,

en vez de decir: Este trozo de tiza es rojo o ese trozo de tiza es rojo o ... o el trozo de tiza de allí es rojo. Más brevemente diría: de entre estos trozos de tiza existe uno rojo. Una afirmación de este tipo que en una totalidad finita existe un objeto que tiene una cierta propiedad, está completamente de acuerdo con nuestra actitud finitista. Por otro lado la expresión

+1 o +2 o +3 o ... hasta el infinito es un número primo

es, como era, un producto lógico infinito y ese paso al infinito no está ya permitido sin una investigación especial y quizás ciertas medidas de precaución acerca del hecho de que el paso de un producto finito a uno infinito en análisis e inicialmente no tiene ningún significado.

En general, desde el punto de vista finito una proposición existencial con la forma existe un número que tiene esta o aquella propiedad tiene sentido sólo como proposición parcial, es decir, como parte de una proposición que se determina más exactamente pero cuyo contenido exacto no es esencial para muchas aplicaciones.

Por tanto, encontramos aquí el transfinito cuando a partir de una proposición existencial extraemos una proposición parcial que no puede ser tomada como una disyunción. De la misma manera encontramos una proposición transfinita cuando negamos una afirmación universal, es decir, una que se extiende a numerales arbitrarios. Así por ejemplo la proposición que, si a es un numeral, debemos tener siempre

$a+1=1+a$

es desde el punto de vista finito imposible de ser negada. Esto nos estará claro si reflexionamos sobre el hecho de que (desde este punto de vista) la proposición no puede ser interpretada como una combinación, formada mediante y de infinitamente muchas ecuaciones numéricas, sino sólo como un juicio hipotético que viene a afirmar algo cuando hay un numeral.

De esto se deduce en particular, que siguiendo el espíritu de la actitud finitista no podemos hacer uso de la alternativa según la cual una ecuación como la anteriormente descrita, en la que aparece un numeral no especificado, es correcta para cualquier numeral o se puede refutar con un contraejemplo. Siendo una aplicación del principio del tercero excluido, esta alternativa se apoya esencialmente en la suposición de que pueda negarse la afirmación de la validez de esa ecuación.

En todos los acontecimientos observamos lo siguiente. En el dominio de las proposiciones finitarias, en el que después de todo nos deberíamos quedar, las relaciones lógicas que prevalecen son muy poco claras, y esta falta de claridad aumenta insoportablemente si todos y existe aparecen combinados o aparecen en proposiciones agrupadas . En este caso, estas leyes lógicas que el hombre ha utilizado desde que empezó a pensar, las mismas que enseñó Aristóteles, no son válidas. Ahora uno podría intentar determinar las leyes lógicas que son válidas para el dominio de las proposiciones finitarias; pero esto no nos ayudaría, ya que nosotros no queremos renunciar al uso de las sencillas leyes lógicas de Aristóteles y nadie, por bien que hable, hará que la gente deje de negar afirmaciones arbitrarias, de formar juicios parciales, o de usar el principio del tercero excluido. ¿Qué debemos hacer entonces?.

Recordemos que somos matemáticos y como tales ya nos hemos encontrado a menudo en algún aprieto similar y recordemos cómo el método de elementos ideales, esa gran creación, nos permitió encontrar una salida entonces. Os he planteado algunos flamantes ejemplos del uso de este método al principio de mi discurso. Al igual que i="−1 se introdujo para que las leyes del álgebra, aquéllas, por ejemplo, sobre la existencia y el número de raíces de una ecuación, pudieran preservarse en su forma más simple, al igual que se introdujeron factores ideales para que pudieran mantenerse las simples leyes de divisibilidad incluso para enteros algebraicos (por ejemplo introdujimos un común divisor ideal para los números 2 y 1+"−5, mientras que realmente no existe), debemos hacer las proposiciones ideales equivalentes a las finitarias para poder mantener las formalmente simples leyes de la lógica ordinaria de Aristóteles. Y es extraño que los modos de inferencia que Kronecker atacó con tanta pasión sean la contrapartida exacta de lo que, cuando se trató de la teoría de los números, el mismo Kronecker admiró con tanto entusiasmo del trabajo de Kummer y lo trató como el logro matemático superior.

¿Entonces cómo llegamos a las proposiciones ideales? Es una circunstancia extraordinaria, y ciertamente propicia y favorable, que para entrar en el camino que lleva a ellas sólo tengamos que continuar de una manera natural y coherente con el desarrollo que la teoría de los fundamentos de la matemática ya ha tomado. Démonos cuenta de hecho de que las matemáticas elementales ya van más allá del punto de vista de la teoría de los números intuitiva. Esta teoría siempre utiliza fórmulas sólo para la comunicación; las letras sustituyen a los números y el hecho de que dos signos sean idénticos es comunicado por una ecuación. Por otro lado, en álgebra, consideramos las expresiones formadas por letras objetos independientes en sí mismos y las proposiciones conceptuales de la teoría de los números se formalizan mediante ellas. Donde teníamos proposiciones con números, ahora tenemos fórmulas que en sí mismas son objetos concretos que a su vez son considerados mediante nuestra intuición perceptiva, y la derivación de una fórmula a otra de acuerdo con ciertas reglas sustituye a la demostración teórico−numérica basada en el contenido .

Por tanto, cuando consideramos el álgebra, hay un aumento del número de objetos finitarios. Hasta ahora sólo eran los numerales como 1,11,...,11111. Ellos habían sido los únicos objetos de nuestra consideración conceptual. Pero en el álgebra la práctica matemática va ya más allá de esto. Sí, incluso cuando una proposición, siempre que esté combinada con alguna indicación a su interpretación conceptual, aún sea admisible desde nuestro punto de vista finito, como, por ejemplo, la proposición de que siempre

a + b = b + a

donde a y b sustituyen a numerales específicos, aún no seleccionamos esta forma de comunicación sino que tomamos la fórmula

a + b = b + a.

Esto ya no es una comunicación inmediata de algo conceptual, sino un cierto objeto formal, que está relacionado con las proposiciones finitarias originales

2 +3 =3 +2

y

5 +7 = 7+ 5

por el hecho de que, si sustituimos los numerales 2, 3, 5 y 7, por a y b en aquella fórmula (es decir si empleamos un proceso de demostración, aunque muy sencillo), obtenemos estas proposiciones finitarias particulares. Así llegamos a la noción de que a, b, =, +, así como toda la fórmula

a + b = b + a,

no significan nada por sí mismos, más allá de lo que lo hacen los numerales. Pero de esa fórmula podemos derivar otras; a éstas les atribuimos un sentido al tratarlas como comunicaciones de proposiciones finitarias. Si generalizamos esta noción, las matemáticas se convierten es un inventario de fórmulas − primero, fórmulas a las que les corresponden comunicaciones conceptuales de proposiciones finitarias (en la mayoría, ecuaciones numéricas y desigualdades) y segundo, otras fórmulas que no significan nada por sí mismas y que son los objetos ideales de nuestra teoría.

¿Entonces cual era nuestro objetivo? En matemáticas, encontramos primero proposiciones finitarias que contienen sólo numerales como

3>2, 2+3=3+2, 2=3 y 1"1,

que según nuestra noción finita son inmediatamente intuitivas y directamente inteligibles. Éstas pueden ser negadas y el resultado será verdadero o falso; uno puede manipularlas según su deseo sin reparos de todas las maneras que permita la lógica de Aristóteles. La ley de contradicción es válida; es decir, que es imposible que cualquiera de estas proposiciones y su negación sean verdaderas simultáneamente. El principio del tercero excluido es válido; es decir, que de las dos, la proposición y su negación, una es verdadera. Decir que una proposición es falsa equivale a decir que su negación es verdadera. Además de estas proposiciones elementales, que son enteramente de carácter no problemático, encontramos proposiciones finitarias de carácter problemático, por ejemplo, aquellas que no se pueden descomponer (en proposiciones parciales). Finalmente hemos introducido las proposiciones ideales para garantizar que las leyes habituales de la lógica sean siempre válidas. Pero puesto que las proposiciones ideales, a saber, las fórmulas, en la medida en que no expresan afirmaciones finitarias, no significan nada por sí mismas, no se les pueden aplicar las operaciones lógicas de una manera conceptual, como se hace con las proposiciones finitarias. Por tanto es necesario formalizar las operaciones lógicas así como las mismas demostraciones matemáticas; esto requiere una trascripción de las relaciones lógicas en fórmulas de manera que a los signos matemáticos debemos equiparar algunos signos lógicos como

&, v, ! ,

y, o, implica, no

y usar, además de las variables matemáticas a, b, c, ..., también variables lógicas, a saber, las proposiciones variables A, B, C, ...

¿Y cómo se puede hacer esto? Tenemos la suerte de encontrar la misma armonía preestablecida aquí que observamos tan a menudo en la historia de la ciencia, una armonía que benefició a Einstein cuando encontró el cálculo general de invariantes totalmente desarrollado para su teoría de la gravitación; descubrimos que ya se ha hecho una parte considerable del trabajo preparatorio: se ha desarrollado el cálculo lógico. Fue creado originalmente en un contexto totalmente diferente y, de esta manera, sus signos fueron introducidos inicialmente con fines únicamente de comunicación; pero seríamos coherentes con nuestro planteamiento si ahora despojáramos también de todo significado a los signos lógicos, como hicimos con los matemáticos, y declarásemos que las fórmulas del calculo lógico no tienen ningún significado por sí mismas tampoco, sino que son proposiciones ideales. En el cálculo lógico poseemos un lenguaje de signos capaz de representar proposiciones matemáticas en fórmulas y de expresar inferencia lógica a través de procesos formales. De una manera que corresponde exactamente a la transición de la teoría conceptual de números al álgebra formal, consideramos los signos y símbolos de operaciones del cálculo lógico como separados de su significado conceptual. De esta manera obtenemos finalmente, en lugar de la ciencia matemática conceptual que se comunica mediante lenguaje ordinario, un inventario de fórmulas que están formadas por símbolos matemáticos y lógicos y siguen unas a otras según reglas definidas. Ciertas de esas fórmulas se corresponden con los axiomas matemáticos y, con la inferencia conceptual se corresponden las reglas según las cuales las fórmulas se siguen unas a otras; así se sustituye la inferencia conceptual por la manipulación de signos según las reglas, y de esta manera se consigue la transición total de un tratamiento ingenuo a uno formal, por un lado para los mismos axiomas, que originalmente se tomaban ingenuamente como verdades fundamentales pero que en los axiomáticos modernos llevan ya tiempo considerándose que meramente establecen ciertas interrelaciones entre nociones, y por el otro para el cálculo lógico, que originalmente sólo había de ser otro lenguaje.

Dejadme explicar brevemente cómo se formaliza una demostración matemática. Como he dicho, ciertas fórmulas, que sirven de bloques de construcción para el edificio formal de las matemáticas, se denominan axiomas. Una demostración matemática es una matriz que debe ser dada como tal a nuestra intuición perceptiva: consta de inferencias según el esquema

$$\underline{\ \ !\ \ }$$

,

donde cada premisa, es decir, las fórmulas y ! de la matriz, bien es un axioma o resulta de un axioma por sustitución, o coincide con la fórmula final de una inferencia anterior o resulta de ésta por sustitución.. Se dice que una fórmula está demostrable si es la fórmula final de una demostración.

A través de nuestro programa la elección de axiomas para nuestra teoría de demostración ya está indicada. Aunque la elección de axiomas es hasta cierto punto arbitraria, recaen sin embargo en un número de grupos cualitativamente distintos, exactamente como en geometría; citaremos unos pocos ejemplos de cada:

I. Axiomas de implicación:

A!(B!A) (introducción de una presunción)

(B!C) !{(A!B) !(A!C)} (eliminación de una proposición

II. Axiomas de negación:

{A!(B&B)} !A (prrincipio de contradicción),

A!A (principio de doble negación).

[Del principio de contradicción sigue la fórmula

(A&A) !B

y del principio de doble negación el principio del tercero excluido,

{(A!B) & (A!B)} !B,

sigue]. Estos axiomas de los grupos I y II son sólo axiomas del cálculo proposicional.

III. Axiomas transfinitos

(a)A(a) !A(b) (inferencia del universal al particular, máxima de Aristóteles),

(a)A(a) ! (Ea)A(a) (si un predicado no es válido para todos los individuos, entonces existe un contraejemplo),

(Ea)A(a) ! (a)A(a) (si no hay un individuo para el que la proposición sea válida, entonces la proposición es falsa para todo *a*).

Además aquí llegamos a una circunstancia extraordinaria, concretamente, todas estos axiomas transfinitos son derivables de un solo axioma, uno que también contiene el núcleo de unos de los axiomas más atacados en la literatura de las matemáticas, a saber, el axioma de elección:

A(a) !A((A)),

Donde   es la función de elección lógica transfinita.

Además están los axiomas específicamente matemáticos.

IV. Axiomas de igualdad:

a=a,

a=b!(A(a) !(A(b)),

y finalmente

V. Axiomas de número:

a+1"0

y

[{A(0)&(x)(A(x) !A(x'))} !A(a)],

el axioma de inducción matemática.

De esta manera somos capaces de desarrollar nuestra teoría de demostración y de construir el sistema de fórmulas demostrables, es decir, la ciencia de las matemáticas.

Pero en nuestro júbilo del hecho de haber tenido éxito, en general, y en particular de haber encontrado preparada aquella herramienta indispensable, el cálculo lógico, no debemos olvidar el prerrequisito esencial de nuestro procedimiento. Hay una condición, sólo una pero necesaria, a la que está sujeta el uso del método de elementos ideales, y esta es la demostración de consistencia; puesto que la extensión mediante la adición de ideales es legítima sólo si de este modo no se produce ninguna contradicción en el viejo y más estrecho dominio, es decir, si las relaciones que resultan para el viejo objeto siempre que se eliminen los objetos ideales son válidas en el viejo dominio.

Sin embargo, en la situación actual este problema de consistencia se puede tratar perfectamente. Como podemos reconocer inmediatamente, se reduce a la cuestión de ver que 1"1 no se puede obtener como fórmula final de nuestros axiomas mediante las reglas en vigor y, por lo tanto que 1"1 no es una fórmula demostrada. Y esto es una tarea que radica fundamentalmente en el campo de la intuición, tanto como lo hace en la teoría conceptual de los números la tarea de, digamos, demostrar la irracionalidad de "2, es decir, de demostrar que es imposible encontrar dos numerales *a* y *b* que satisfagan la relación *a2=2b2*, un problema en el que se debe mostrar que es imposible exponer dos numerales que tengan cierta propiedad. De la misma manera, para nosotros la cosa es mostrar que es imposible exponer una demostración de un cierto tipo. Pero una demostración formalizada, como un numeral, es un objeto concreto y posible de estudiar. Puede ser comunicado de principio a fin. Que la fórmula final tenga la estructura requerida, a saber 1"1, es también una propiedad de la demostración que puede ser establecida concretamente. La demostración (de que 1"1 es una fórmula no demostrada) puede hacerse, y esto nos proporciona una justificación para la introducción de nuestras proposiciones ideales.

Al mismo tiempo experimentamos con agradable sorpresa que esto nos da la solución también a un problema que se hizo urgente hace tiempo, concretamente, el de demostrar la consistencia de los axiomas aritméticos. El problema de demostrar la consistencia aparece siempre que se utiliza el método axiomático. Después de todo, al seleccionar, interpretar y manipular los axiomas y las reglas no queremos tener que fiarnos de la buena fe y la pura confianza únicamente. En geometría y en las teorías de la física, la demostración de la consistencia se lleva a cabo con éxito mediante una reducción a la consistencia de los axiomas aritméticos. Este método obviamente falla en el caso de la misma aritmética. Al hacer posible este importante paso final a través del método de elementos ideales, nuestra teoría de la demostración forma la pieza angular necesaria en el edificio de la teoría axiomática. Y lo que hemos experimentado dos veces, primero con las paradojas del cálculo infinitesimal y luego con las paradojas de la teoría de conjuntos, no puede suceder una tercera vez ni volverá a suceder nunca más.

Pero nuestra teoría de demostración tal y como está esbozada aquí no es sólo capaz de garantizar los fundamentos de la ciencia de las matemáticas; creo que también abre un camino que, si lo seguimos, nos permitirá tratar por primera vez con los problemas generales de un personaje fundamental que entra en el dominio de las matemáticas pero al que anteriormente no nos podíamos acercar.

En cierto sentido la matemática se ha convertido en una corte de arbitraje, un tribunal supremo para decidir cuestiones fundamentales sobre una base concreta en la que todos pueden concordar y donde cada afirmación sea controlable.

Incluso las afirmaciones de la doctrina reciente llamada intuicionismo, con todo lo modestas que puedan ser, pueden, en mi opinión obtener su certificado de justificación sólo de este tribunal.

Un ejemplo del tipo de cuestiones fundamentales que pueden ser tratadas de este modo es la tesis de que todo problema matemático es soluble. Todos nosotros estamos convencidos de que realmente es así. De hecho uno de los principales atractivos para atacar un problema matemático es que siempre oímos esta voz dentro de nosotros: Ahí está el problema, encuentra la contestación, siempre la puedes encontrar puramente pensando, pues en matemática no hay ningún *ignorabimus*. Mi teoría de demostración no puede especificar un método general para resolver cada problema matemático; eso no existe. Pero la demostración de la suposición de que la solucionabilidad de todo problema matemático es posible cae totalmente dentro de las posibilidades de nuestra teoría.

Aún me gustaría jugar una última baza. El test final de cada nueva teoría es su éxito en contestar preguntas preexistentes para las que la teoría no fue creada específicamente. Los conoceréis por su frutos − esto se aplica a todas las teorías. En cuanto Cantor descubrió sus primeros número transfinitos, los números de la segunda clase numérica como se les conoce, surgió la pregunta, como ya he mencionado, de si mediante su forma de contar transfinita uno podía realmente enumerar los elementos de conjuntos conocidos en otros contextos pero no enumerables en el sentido habitual. El segmento de la línea fue el primer y más destacado conjunto de este tipo en estudiarse. Esta pregunta, si los puntos del segmento de una línea, es decir, los números reales, puedes ser enumerados mediante los números de la tabla construida mas arriba, es el famoso problema del continuo, que formuló pero no pudo resolver Cantor. Algunos matemáticos pensaron que no podían deshacerse de este problema negando su existencia. Las consideraciones que vendrán ahora demuestran lo equivocado de esta actitud. Es problema del continuo destaca por su originalidad y belleza interior; además se caracteriza por dos rasgos que lo elevaron por encima de otros problemas famosos: su solución requiere nuevos caminos, puesto que los métodos antiguos fallan en este caso, y , además, esta solución goza, por sí misma, del mayor interés debido al resultado que se ha de establecer.

Se puede llevar a cabo la solución del problema del continuo mediante la teoría que he desarrollado, y de hecho, el primer y decisivo paso hacia la solución está precisamente en la demostración de que se puede resolver cada problema matemático. La respuesta resulta ser afirmativa: los puntos del segmento de una línea pueden ser enumerados mediante los números de la segunda clase numérica, es decir, mediante la mera transnumeración más allá del infinito enumerable, por expresarlo de una manera sencilla. Me gustaría llamar a esta afirmación el teorema del continuo y ofrecer una breve presentación intuitiva aquí de la idea fundamental de esta demostración.

En lugar del conjunto de números reales consideramos − lo que es evidentemente lo mismo aquí.. el conjunto de funciones teórico−numéricas, es decir, de aquella funciones de un argumento integral cuyos valores son también enteros. Si queremos ordenar el conjunto de estas funciones de la manera requerida por el problema del continuo, hemos de considerar cómo se genera una función individual. Una función de un argumento puede ser definida de tal manera que los valores de la función de algunos e incluso todos los valores del argumento se hagan depender de si cierto problema matemático bien planteado tiene solución, por ejemplo, si ciertos problemas diofantinos tienen solución, o si existen los números primos que tengan cierta propiedad, o si un número, digamos 2"2, es racional. Para evitar la dificultad inherente en esto, hacemos uso precisamente de la afirmación mencionada anteriormente, a saber, que todo problema matemático bien planteado tiene solución. Esta afirmación es un lema general que pertenece a las metamatemáticas, como me gustaría llamar a la teoría conceptual de demostraciones formalizadas. A la parte del lema que es de relevancia aquí, yo le soy la siguiente formulación precisa:

LEMA I. Si una demostración de una proposición que contradice el teorema del continuo se da en una versión formalizada con la ayuda de funciones definidas mediante el símbolo transfinito (grupo de axiomas III), entonces en esta demostración siempre se pueden reemplazar esas funciones por funciones definidas, sin utilizar el símbolo , mediante mera recursión ordinaria y transfinita, de manera que el transfinito aparezca sólo a modo de cuantificador universal.

Tengo que hacer unas pocas estipulaciones para llevar a cabo mi teoría.

Para las *proposiciones variables [atómicas]* (fórmulas indeterminadas) siempre utilizamos letras latinas [cursivas] mayúsculas, pero para *proposiciones constantes [atómicas]* (fórmulas específicas) utilizamos letras griegas mayúsculas; por ejemplo,

(a): (*a* es un entero ordinario

N(a): a es un número de la segunda clase numérica

Para las *variables matemáticas* utilizamos siempre letras latinas [cursivas] minúsculas, pero para los *objetos constantes matemáticos* (funciones específicas) utilizamos letras griegas minúsculas.

En cuanto al procedimiento de sustitución, son válidas las siguiente convenciones generales:

La variables proposicionales sólo pueden ser sustituidas por otras proposiciones (fórmulas) indeterminadas o constantes.

Cualquier matriz puede ser sustituida por una variable matemática; sin embargo, cuando aparece una variable matemática en una fórmula, siempre debe preceder la proposición constante que especifica de qué tipo es, junto con el signo de implicación; por ejemplo

(a)!(...a...)

y

N(a)!(...a...)

El efecto de esta convención es que, después de todo, sólo se tienen en consideración como sustituendos los números ordinarios o los números de la segunda clase numérica, por ejemplo *a* en Z(*a*) o *N(a)*, respectivamente.

Las letras alemanas mayúsculas y minúsculas hacen *referencia* y sólo se usan para expresar información.

También debemos aclarar que por matriz debemos entender un objeto determinado perceptivamente compuesto de signos primitivos.

Para entender la idea de la demostración del teorema del continuo debemos, por encima de todo, adquirir un entendimiento preciso de la noción de variable matemática en su sentido más general, las variables matemáticas son de dos tipos: (1) *variables primitivas* [*Grundvariablen*] y (2) *tipos variables* [*Variablentypen*].

(1) Mientras que en toda la aritmética y en el análisis [la variable que abarca] los enteros ordinarios bastan como única variable primitiva, a cada clase numérica de Cantor va asociada una variable primitiva que abarca exactamente los ordinales de esa clase. De la misma manera, a cada variable primitiva le corresponde una proposición que la caracteriza como tal; esta proposición está caracterizada implícitamente por los axiomas, por ejemplo,

Z(0),

Z(*a*)!Z(*a*+1)

{*A*(0) & (*a*)(*A*(*a*) !*A*(*a* + 1))} !{Z(*a*) !*A*(*a*)} (fórmula de la inducción ordinaria),

N(0),

N(*a*) !N(*a* + 1)

(*n*){Z(*n*) !N(*a*(*n*))} !N(lim *a*(*n*)),

y, además, la fórmula de inducción transfinita para los números de la segunda clase.

Con cada tipo de variable primitiva hay asociada un tipo de recursión, mediante la cual definimos funciones cuyo argumento es una variable primitiva de ese tipo. La recursión asociada con la variable teórico numérica es la recursión ordinaria, mediante la cual se define una función de una variable teórico numérica *n* cuando indicamos qué valor tiene para *n*=0 y cómo el valor *n*+1 se obtiene de ello para *n*. La generalización de la recursión ordinaria es la recursión transfinita; se basa en el principio general de que el valor de la función para un valor de la variable está determinado por los valores precedentes de la función.

(2) De las variables primitivas derivamos más tipos de variables al aplicar conectores lógicos a las proposiciones asociadas con las variables primitivas, por ejemplo, a Z y N. Las variables definidas de esta manera se denominan tipos variables, y las proposiciones que las definen proposiciones tipo; para éstas, se introducen nuevos signos constantes cada vez. Por tanto, la fórmula

(*a*){Z(*a*) !Z((*a*))}

ofrece el ejemplo más simple de tipo variable, ya que esta fórmula define la función variable y, como proposición tipo, será indicada por ( ) (ser una función). Otro ejemplo más es la fórmula

( ){ ( ) ! Z(*g*( ))};

define el ser una función de una función (*g*), donde el argumento *g* es la nueva variable de la función de una función.

Para caracterizar los tipos variables superiores debemos proporcionar subíndices a las mismas proposiciones tipo; por tanto se define una proposición tipo provista de un subíndice mediante recursión, tomando la equivalencia lógica (~) el lugar de la igualdad (=).

En toda la aritmética y el análisis sólo se utilizan como variables superiores la variable funcional, la variable de función de una función, y a sí en una infinita iteración. Un tipo variable que va más allá de estos simples ejemplos lo ofrece la variable *g* que asigna un valor numérico *g*(*n*) a una secuencia *n* que consta de

una función de un entero, ( ),

una función de una función, ( ),

una función de una función de una función,

y así sucesivamente.

La proposición tipo correspondiente (*g*) se representa mediante las siguientes equivalencias:

(*a*)~Z(*a*),

n+1( )~(b){ n(b)!Z((b))},

(g)~{(n) n(n)!Z(g( ))};

éstas a su vez ofrecen un ejemplo de definición de una proposición tipo mediante recursión.

Se pueden clasificar los tipos variables según sus *alturas*. Entre aquellos de altura 0 incluimos todas las constantes teórico−numéricas y entre aquellos de altura I todas aquellas funciones cuyos argumentos y valores tengan la propiedad de una variable primitiva, por ejemplo, la propiedad Z o la propiedad N. Una función cuyo argumento y valor tenga ciertas alturas posee una altura superior en 1 que la superior de esas dos alturas, o posiblemente que las dos. Una secuencia de funciones de varias alturas tiene el límite de esas alturas como su altura.

Después de esta preparación volvemos a nuestra tarea y recordamos que, para demostrar el teorema del continuo, es necesario establecer una correlación entre cada una de las definiciones de funciones teórico−numéricas que están libres del símbolo   y cada uno de los números de la segunda clase numérica de Cantor, o al menos establecer una correspondencia entre ellos de tal manera que cada función teórico−numérica vaya asociada con al menos un número de la segunda clase numérica.

Claramente, los medios elementales con los que contamos para formar funciones son la *sustitución* (es decir, el reemplazo de un argumento por una nueva variable o función) y la *recursión* (siguiendo el esquema de la derivación del valor de la función n+1 desde eso para n).

Se puede pensar que estos dos procesos, sustitución y recursión, deberían ser complementados con otros métodos elementales de definición, por ejemplo, la definición de una función por especificación de sus valores hasta cierto valor del argumento, más allá del cual la función debe ser constante, así como la definición mediante procesos elementales obtenidos de operaciones aritméticas, como el del mínimo común múltiplo, digamos, o del máximo común divisor de dos números, o incluso la definición de un número como el más pequeño de finitamente muchos números determinados.

Sin embargo resulta que cualquiera de tales definiciones se pueden representar como un caso especial de sustitución y recursión. El método de búsqueda de las recursiones requeridas es, en esencia, equivalente al reflejo por el cual uno reconoce que el procedimiento utilizado para la definición dada es finitario.

Una vez afirmado esto, debemos estudiar los resultados de las dos operaciones de sustitución y recursión. Sin embargo, debido a la variedad de maneras por las que podemos pasar de n a n+1, no podemos plantear las recursiones que deben usarse en una forma estándar si nos restringimos a operar con variables teórico−numéricas ordinarias. Esta dificultad ya se hace evidente en el siguiente ejemplo.

Consideremos las funciones $a+b$; de ellas obtenemos, mediante iteración de n veces e identificación,

$a+a+...+a=a*n$

De la misma manera pasamos de a*b a

$a*a*...*a=an$,

y de ab a

(ver texto original) $a(a^{a}), a(a(^{aa}))$

De esta manera sucesivamente obtenemos las funciones *a*+*b*= (*a*, *b*),

*a***b*= 2(*a*, *b*),

ab= (*a*, *b*).

(*a*, *b*) es el b^o término de la secuencia

(ver texto original) a, aa, $a(a^a)$, $a(a(^{aa}))$

De la misma manera llegamos a (*a*, *b*), (*a*, *b*), etc.

Podríamos definir *n*(*a*, *b*) para una variable n mediante sustituciones y recursiones, pero estas recursiones no serían ordinarias y paso a paso; más bien nos veríamos arrastrados a una recursión múltiple simultanea, es decir, una recursión sobre diferentes variables a la vez y sólo sería posible una resolución en recursiones ordinarias y paso a paso si hacemos uso de la noción de variable de función; la función *a*(*a*, *a*) es un jemplo de una función, de la variable teórico−numérica *a*, que no puede ser definida únicamente mediante recursiones ordinarias y paso a paso si admitimos sólo variable teórico−numéricas Las siguientes fórmulas muestran cómo podemos definir la función *n*(*a*, *b*) usando la variable de función:

(, *a*, 1) = *a*,

(, *a*, *n*+1) = (*a*, (, *a*, *n*));

(*a*, *b*) = *a*+*b*,

n+1(*a*, *b*) = (n, *a*, *b*).

Aquí representa una función específica de tres argumento, el primero de los cuales es por sí mismo una función de dos variables teórico numéricas ordinarias.

Otro ejemplo de una recursión más complicada es:

(*a*) = *a*(*a*),

n+1(*a*) = f(*a*, *n*, *n*(*n*(*n*+*a*))),

donde *a* representa una expresión conocida que contiene un argumento, y f una expresión conocida que contiene tres argumentos. Lo que es característico de esta recursión es que aquí no podemos obtener un valor numérico para *n*+1 de uno para *n*, sino que tenemos que hacer uso del alcance de la función *n* al determinar *n*+1.

Las dificultades que salen a la luz en estos ejemplos se superan cuando hacemos uso de los tipos variables; entonces el esquema de la recursión general es el siguiente:

(ver texto original) (*g*, *a*, 0) = a,

(ver texto original) (g, *a*, *n*+1) = *g*((*g*, *a*, *n*), *n*);

aquí a es una expresión dada de tipo variable arbitrario; de la misma manera g es una expresión dada, que tiene dos argumentos, el primero de los cuales es del mismo tipo variable que a y el segundo es un número; la condición adicional que debe cumplir g es que su valor sea otra vez del mismo tipo variable que a.

Finalmente,   es la expresión que ha de ser definida mediante la recursión; depende de tres argumentos y, después de que se hagan las sustituciones de g, a y *n*, es del mismo tipo variable que a; además está permitido que se den otros parámetros arbitrarios en *a* y *g*, y, consecuentemente, también en .

De este esquema general obtenemos recursiones específicas a través de la sustitución. Así obtenemos las recursiones de nuestros ejemplos, al considerar, en el primer ejemplo,   y *a* como parámetros y al representar, en el segundo, la transición de *n*(*a*) a *n*+1(*a*) como una transición (lograda mediante la función de una función g) de una función *n* a la función *n*+1,de manera que a no sea de ningún modo un parámetro en la recursión. Comparada con la recursión elemental, la recursión utilizada en nuestros dos ejemplos es de un tipo más amplio, ya que en un caso introducimos un parámetro superior que no es un entero ordinario y en el otro elegimos una función para a y una función de una función para g.

Los tipos variables forman el enlace que hace posible la correspondencia entre las funciones de una variable teórico−numérica y los números de la segunda clase numérica. De hecho, llegamos a tal correspondencia entre los números de la segunda clase numérica y ciertos tipos variables si comparamos los dos procesos de generación de los números de la segunda clase numérica (es decir, el proceso de añadir 1 y el proceso límite para secuencias enumerable) con la manera en la que los tipos variables aumentan en altura. Vamos a establecer una correspondencia entre el proceso de añadir uno y la resta de una función (es decir, sustitución de un tipo variable en una función como argumento) y entre el proceso límite y la agregación de la secuencia enumerable asociada con un tipo variable en un nuevo tipo variable, y vamos a designar los tipos variables que de esta manera vienen a corresponder a los números de la segunda clase numérica específicamente como tipos Z. Así, cuando se forman los tipos Z, usamos, además de las operaciones lógicas, únicamente recursiones ordinarias (no transfinitas), es decir, sólo aquellas necesarias para la enumeración de una secuencia tipo como paso preliminar para el proceso límite. Si ordenamos estos tipos Z según sus alturas, tenemos una correspondencia de uno a uno mediante la cual los tipos variables de una determinada altura son asociados con un número de la segunda clase numérica.

Pero con esto también llegamos a una correspondencia de uno a uno entre los números de la segunda clase numérica y las funciones definidas mediante los tipos Z. Para hacer esto claro bastan las siguientes consideraciones. Siempre que empezamos con los tipos variables de hasta una altura determinada y luego formamos funciones únicamente por medio de la sustitución y la recursión, obtenemos sólo enumerablemente muchas funciones. Incluso podemos formalizar rigurosamente esta enumeración; en particular, podemos hacerlo construyendo, en primer lugar, una función de recursión   que subsume todas las recursiones en cuestión y, consecuentemente, contiene un parámetro que supere los tipos variables admitidos hasta ese punto. Al definir   aplicamos el esquema de la recursión general de tal manera que se hace un uso esencial de este tipo variable superior. Entonces ordenamos por alturas las especializaciones relevantes de los tipos variables que tienen lugar en   y con ello obtenemos las diversas sustituciones iniciales, que dispondremos en una secuencia enumerada. Una vez se ha establecido esta enumeración, la introducción de un orden según el número de sustituciones que se han de hacer produce las funciones que debían ser definidas.

En el razonamiento que acabo de describir he presupuesto esencialmente la teoría de los números de la segunda clase numérica. He introducido los números de la segunda clase numérica simplemente como resultado de la trasnumeración más allá del infinito enumerable, y la proposición constante N (ser un número de la segunda clase numérica) ha sido descrita después mediante un listado de axiomas. Pero estos axiomas establecen sólo el marco general de una teoría. Para proporcionarle una base más precisa es necesario determinar cómo ha de formalizarse el proceso de trasnumeración más allá del infinito "enumerable". Esto se hace aplicando el proceso de trasnumeración a una secuencia; esta secuencia puede darse sólo por medio de una recursión ordinaria y por estas recursiones ciertos tipos son a su vez necesarios.

Esta circunstancia parece presentar una dificultad, pero, de hecho, el reflexionar precisamente sobre este punto nos permite hacer mucho más estrecha la correspondencia entre los números de la segunda clase numérica y las funciones de una variable teórico−numérica. Los tipos variables que necesitamos para la producción de los números de la segunda clase numérica se obtienen mediante la sustitución formal del signo Z por el signo N en uno o más sitios de las proposiciones tipo definidas que tenemos hasta este punto. Llamaremos a los tipos variables que resultan tipos N; como es obvio, los correspondientes tipos Z y tipos N tienen la misma altura. Ahora no necesitamos asociar todas las funciones de la misma altura con un determinado número de la segunda clase numérica, sino que podemos dejar que los números de la segunda clase numérica y las funciones se correspondan entre sí según las alturas de los tipos variables requeridos para su definición. Vamos a llevar a cabo una formulación más precisa de dicha correspondencia.

Si sólo llegamos a una cierta altura con los tipos Z, las alturas de los tipos N correspondientes también están limitadas. A partir de los números de la segunda clase numérica que se pueden producir con estos tipos, podemos obtener, por medio de una secuencia creciente, un número mayor de la segunda clase numérica, que se define mediante un tipo variable superior. Si, por otro lado, tenemos tipos N hasta una cierta altura, las funciones definibles mediante los correspondientes tipos Z pueden ser enumeradas también − de la manera descrita anteriormente, según el número de sustituciones. Como es bien conocido, de tal enumeración (a, n) obtenemos mediante el procedimiento diagonal de Cantor (por ejemplo, al formar $(a, a) + 1$) una función que difiere de todas las funciones enumeradas y que por tanto no podría ser definida por medio de los tipos variables admitidos anteriormente.

Así hemos hecho posible el establecimiento de una correspondencia de uno a uno entre los números de la segunda clase numérica que son definibles en la altura en cuestión (pero no en una inferior) y las enumerablemente muchas funciones que son definibles en la misma altura, y de esta manera cada función esta asociada con al menos un número de la segunda clase numérica.

Sin embargo, con esto aún no está completa la demostración del teorema del continuo; todavía falta información adicional esencial. Para poder establecer la correspondencia, hemos tenido que hacer suposiciones restrictivas en todo lo que llevamos de nuestra investigación en dos sentidos: primero, nuestro esquema general de recursión para sólo incluye el caso de la recursión ordinaria (donde la variable teórico−numérica es la variable en la que sigue la recursión) y segundo, también hemos restringido los tipos variables a aquellos que resultan de la trasnumeración más allá de secuencias enumeradas. Es cierto que, en general, las recursiones transfinitas y, de la misma manera, los tipos variables superiores se utilizan necesariamente en las investigaciones matemáticas, por ejemplo, para la formación de ciertos tipos de funciones de variables reales. Pero en nuestro problema, donde se trata de formar funciones de una variable teórico−numérica, no necesitamos tales recursiones y tipos variables superiores, ya que es válido el siguiente lema.

LEMA II. En la formación de funciones de una variable teórico−numérica son prescindibles las recursiones transfinitas; en particular, no sólo basta la recursión ordinaria (es decir, la que sigue en una variable teórico−numérica) para el mismo proceso de formación de las funciones, sino que las sustituciones sólo exigen aquellos tipos variables cuya definición requiere sólo recursión ordinaria. O, para expresarnos con mayor precisión y más en el espíritu de nuestra actitud finitista, si al aducir un recursión superior o un tipo variable correspondiente hemos formado una función que tiene sólo una variable teórico−numérica ordinaria como argumento, podemos definir siempre esta función también mediante recursiones ordinarias y el uso exclusivo de tipos Z.

El siguiente ejemplo típico nos aclarará el significado y el ámbito de este lema.

Si imaginamos que ha sido formalizada la correspondencia entre las funciones de un argumento teórico numérico y los números de la segunda clase numérica, por este mismo hecho tenemos una cierta función (a, n) que asocia un número ordinario con un número arbitrario a de la segunda clase numérica y el número ordinario n (para una a fija y una variable n, (a, n) representa precisamente la función asociada con a). Si ahora sustituimos a por un número n (de la segunda clase numérica), que depende de n, (la secuencia del n definida mediante recursión ordinaria o incluso transfinita), por ejemplo, *n*+1= *n*,

entonces (*n*, *n*) es una función de una variable teórico numérica *n*; y nuestro Lema II ahora afirma de esta función que puede ser definida a través de recursión ordinaria y mediante tipos Z, mientras que es ciertamente imposible definir (*a*, *n*) por estos medios, ya que, después de todo, la suposición contraria lleva claramente a una contradicción.

Me gustaría volver a señalar expresamente que la presentación aquí hecha de la demostración del teorema del continuo contiene sólo las ideas fundamentales; su realización completa requeriría, además de las demostraciones de los dos lemas, una reestructuración totalmente fiel a la actitud finitista.

Finalmente vamos a recordar nuestro tema real y, en lo que respecta al infinito, hacer balance de todas nuestras reflexiones. El resultado final es: el infinito no se desarrolla en ninguna parte; ni está presente en la naturaleza ni es admisible como un cimiento en nuestro pensamiento racional − una armonía digna de mención entre el ser y el pensamiento. Obtenemos una convicción que es contraria a los esfuerzos anteriores de Frege y Dedekind, la convicción de que, si el conocimiento científico ha de ser posible, son indispensables ciertas concepciones intuitivas; la sola lógica no es suficiente. El derecho a operar con el infinito sólo puede ser garantizado por medio del finito.

El papel que le queda al infinito es meramente el de una idea − si, de acuerdo con las palabras de Kant, entendemos por idea la razón que trasciende toda experiencia y a través de la cual se completa lo concreto como para formar una totalidaduna idea, además, en la que podemos tener confianza total dentro del marco proporcionado por la teoría que he esbozado y recomendado aquí.

Para finalizar, me gustaría expresar mi gratitud a P. Bernays por su comprensiva colaboración y la ayuda valiosa que me brindó en cuestiones tanto de materia como de forma, especialmente en la demostración del teorema del continuo.

Quizás se debería añadir también el 1930b

Al contrario que Cantor, Hilber toma las clases numéricas como acumulativas; véase su definición de la segunda clase numérica en la pág. 386

En el presente párrafo y el siguiente, Zeichen aparece traducido como signo y Zahlzeiche como numeral, aúnque Hilbert en ocasiones utilice el primero como abreviatura del segundo; Los Zahlzeichen están, obviamente incluidos en los Zeichen. Además, cuando Hilbert utiliza Abkürzung, aquí traducido como abreviatura, navega entre 2 significados: abreviatura de un símbolo y el nombre de ese símbolo.

En sus diversos ensayos sobre los fundamentos de las matemáticas, Hilbert quiere decir con axiomas aritméticos a veces axiomas para el sistema de números reales y a veces axiomas para la teoría de los números.

Los términos de Hilbert requieren algunos comentarios. Las letras latinas cursivas en mayúsculas, como *A* o *B*, representan *variables proposicionales* (*Aussagenvariablen*) o variables predicativas; si aparecen con paréntesis y variables individuales, representan los que Hilbert llama *variable Aussagen* (*proposiciones variables* en la traducción); estas proposiciones son de hecho funciones proposicionales. Las letras griegas mayúsculas representan constantes predicativas y, cuando aparecen con paréntesis y variables individuales, representan los que Hilbert denomina *individuelle Aussagen* o *Individualaussagen* (*proposiciones constantes* en la traducción); son de hecho funciones proposicionales, y un ejemple es (*a*), *a* es un número natural. La letras latinas cursivas minúsculas representan lo que Hilbert llama *mathematische Variablen* (*variables matemáticas* en la traducción); son variables individuales, abarcando los números naturales, los números de la segunda clase numérica, o las funciones teórico−numéricas, como se especifica en cada caso. Las letras griegas minúsculas representan *individuelle mathematische Gebilde* (*objetos matemáticos constantes* en la traducción); son constantes individuales que representan números o funciones (*spezielle Funktionen*, o *funciones específicas* en la traducción).

Función de una función se utiliza aquí en el sentido de funcional, no de función compuesta.